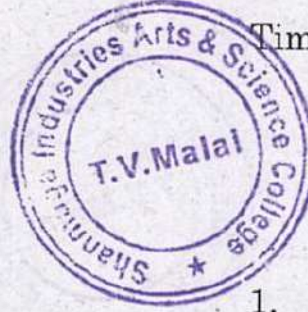
19. Evaluate $\iint (y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k})\, ds$ where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ lying in the positive octant.

$\iint (y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k})\, ds$ யை மதிப்பிடுக. இங்கு S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் மிகை கால்அரை பகுதியில் அமையும் புறப்பரப்பை குறிக்கும்.

20. Verify Gauss's divergence theorem for $\vec{F} = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$ taken over the rectangular paralleloppied $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

$0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ என்பவைகளால் அடைப்படும் இணைகர திண்மத்தை பொறுத்து $\vec{F} = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$ என்ற சார்புக்கு காஸின் பாய்வு தேற்றத்தை சரிபார்.



APRIL/MAY 2025

23UMA31 — VECTOR CALCULUS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. Define scalar point function.

   அளவி புள்ளி சார்பை வரையறு.

2. If $\vec{F} = \sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + t\, \vec{k}$ then find $\dfrac{d^2\vec{F}}{dt^2}$.

   $\vec{F} = \sin t\, \vec{i} + \cos t\vec{j} + t\, \vec{k}$ எனில் $\dfrac{d^2\vec{F}}{dt^2}$யைக் காண்க.

3. Define divergence of a Vector point function.

   நெறியம் புள்ளி சார்பின் பாய்வை வரையறு.

4. Prove that $\nabla(\phi\Psi) = \phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\phi$.

   $\nabla(\phi\Psi) = \phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\phi$ என நிரூபி.

5. Prove that $\nabla(\nabla\phi)=\nabla^2\phi$.

$\nabla(\nabla\phi)=\nabla^2\phi$ என நிருபி.

6. If $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ then prove that $\nabla\times\vec{r}=0$

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ எனில் $\nabla\times\vec{r}=0$ என நிருபி.

7. Define volume integral.
கனஅளவு தொகையை வரையறு.

8. If $\phi=x^2+y^2-16$ then find unit normal Vector $\hat{n}$.

$\phi=x^2+y^2-16$ எனில் ஒரலகு செங்குத்து வெக்டர் $\hat{n}$ யை காண்க.

9. If $\vec{F}=curl\,\vec{A}$ then prove that $\iint_s \vec{F}.\hat{n}\,ds=0$ for any closed surface.

எந்தவொரு மூடிய புறப்பரப்புக்கும் $\vec{F}=curl\,\vec{A}$ எனும்போது $\iint_s \vec{F}.\hat{n}\,ds=0$ என நிருபி.

10. State Green's theorem.
கீரினின் தேற்றத்தை எழுதுக.



(அ) $\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C})$ ன் மதிப்பை $\vec{A}=2u\vec{i}-u^2\vec{j}+u^2\vec{k}$, $\vec{B}=-u\vec{i}+u^2\vec{k}$ மற்றும் $\vec{C}=u^3\vec{j}-2u\vec{k}$ எனும் போது காண்க.

(ஆ) $F_1=F_1(u)$, $F_2=F_2(u)$ மற்றும் $\frac{dF_1}{du}=W\times F_1$ மற்றும் $\frac{dF_2}{du}=W\times F_2$ எனில் $\frac{d}{du}(F_1\times F_2)=W\times(F_1\times F_2)$ என நிருபி.

17. Prove that $\vec{F}=(2x+yz)\vec{i}+(4y+zx)\vec{j}-(6z-xy)\vec{k}$ is solenoidal and irrotational.

$\vec{F}=(2x+yz)\vec{i}+(4y+zx)\vec{j}-(6z-xy)\vec{k}$ எனில் $\vec{F}$ என்பது பாய்வற்றது மற்றும் சுழற்சி அற்றது என நிருபி.

18. Find $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ where $\vec{F}=(x^2-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$ and C is the square bounded by the coordinate axes and the lines $x=a$, $y=a$.

$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ யை மதிப்பிடுக. இங்கு $\vec{F}=(x^2-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$ மற்றும் C என்பது ஒருங்கிணைப்பு அச்சுகள் மற்றும் $x=a$, $y=a$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் பகுதி சதுரம் ஆகும்.

(b) Verity Green's theorem in the plane for $\int_c (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$ where c be the boundary of the region defined by $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$.

$\int_c (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$ க்கு கீரினின் தேற்றத்தை சரிபார். இங்கு c என்பது $y = \sqrt{x}$ மற்றும் $y = x^2$ ஆல் அடைபடும் பகுதியாகும்.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. (a) Find $\frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})$ $\dot{H}$ $\vec{A} = 2u\vec{i} - u^2\vec{j} + u^2\vec{k}$, $\vec{B} = -u\vec{i} + u^2\vec{k}$ and $\vec{C} = u^3\vec{j} - 2u\vec{k}$.

(b) If $F_1 = F_1(u), F_2 = F_2(u)$ and $\frac{dF_1}{du} = W \times F_1$ and $\frac{dF_2}{du} = W \times F_2$ then prove that $\frac{d}{du}(F_1 \times F_2) = W \times (F_1 \times F_2)$.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Find the acceleration of the particle which moves along the curve $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ at $t = \frac{\pi}{2}$.

$x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ என்ற வளைவரையை சுற்றி வரும் துகளின் முடுக்கத்தை $t = \frac{\pi}{2}$ ல் காண்க.

Or

(b) If $\vec{r} = \vec{a} \cos wt + \vec{b}$ then prove that $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = w\vec{a} \times \vec{b}$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2 b$.

$\vec{r} = \vec{a}\cos wt + \vec{b}$ எனில் $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = w\vec{a} \times \vec{b}$ மற்றும் $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2 b$ என நிரூபி.

12. (a) If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and $r = |\vec{r}|$ then prove that $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும் $r = |\vec{r}|$ எனில் $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$ என நிரூபி.

Or

(b) Find ϕ if $\nabla\phi = (6xy + z^3)\vec{i} + (3x^2 + z)\vec{j} + (3xz^2 - y)\vec{k}$.

$\nabla\phi = (6xy + z^3)\vec{i} + (3x^2 + z)\vec{j} + (3xz^2 - y)\vec{k}$ எனில் ϕ யைக் காண்க.

13. (a) If $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ then prove that $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$.

$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ எனில் $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ என நிருபி.

Or

(b) Show that $\nabla^2(e^r) = e^r + \frac{2}{r}e^r$.

$\nabla^2(e^r) = e^r + \frac{2}{r}e^r$ என நிருபி

14. (a) Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds$. Where $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ and S is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ included in the first octant between $z = 0$ and $z = 5$.

$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds$ யை மதிப்பிடுக. இங்கு $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $z = 0$ மற்றும் $z = 5$ க்கு இடையில் மற்றும் $x^2 + y^2 = 16$ க்கு இடைப்பட்ட முதல் கால் அரைபகுதியில் உள்ள புறப்பரப்பு.

Or

(b) Evaluate $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dv$. Where $\vec{F} = (2x^2 - 3z)\vec{i} - 2xy\vec{j} - 4x\vec{k}$ and V is enclosed region bounded by the planes $x = 0$, $y = 0, z = 0$ and $2x + 2y + z = 4$.

$\vec{F} = (2x^2 - 3z)\vec{i} - 2xy\vec{j} - 4x\vec{k}$ எனில் $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dv$ யைக் கணக்கிடுக. இங்கு V என்பது $x = 0$, $y = 0, z = 0$ மற்றும் $2x + 2y + z = 4$ என்ற தளங்களால் அடைபடும் மூடிய பகுதியாகும்.

15. (a) Verity stoke's theorem when $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ along xy plane.



$\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ மற்றும் S என்ற புறப்பரப்பானது xy தளத்தை பொறுத்து $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளத்தின் பகுதி எனில் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்.

Or